III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

VI. osztály

1. feladat. Legyen $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^8$.

a) Igazold, hogy A osztható 15-tel!

b) Igazold, hogy A nem osztható 31-gyel!

c) Igazold, hogy $(x + 2)$ osztható 3-mal, ahol $\dfrac{x-1}{0,8} = A$.

2. feladat. Az $\widehat{AOB}$ és a $\widehat{COD}$ nem egymás melletti szögek, belső tartományuknak nincs közös pontja, és OB az $\widehat{AOC}$ szögfelezője. Ha a $\widehat{COD}$ mértéke 12°-kal kisebb, mint a $\widehat{COB}$ mértéke, valamint az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{COD}$ szögek OX, illetve OY szögfelezője 78°-os szöget zár be, akkor határozd meg az $\widehat{YOA}$ mértékét!

3. feladat. Egy fotókiállítás 252 fotója közül háromtagú zsűri döntötte el, két forduló során, hogy melyek a legjobbak. Az első fordulóban mindegyik zsűri kijelölt 50, általa legjobban kedvelt fotót. Azok a fotók, melyet legalább ketten jelöltek, továbbjutottak a második fordulóba. Tudjuk, hogy az első zsűritag által választottakból 33, a második zsűritagéből 28, a harmadikéból pedig 36 nem került a legjobb fotók közé. Igazold, hogy a második fordulóba került fotók között volt legalább egy olyan fotó, melyet mindhárom zsűritag kijelölt!

4. feladat. Az ABC háromszögben E és F az AB, illetve AC oldalak egy-egy pontja. Jelöljük az $\widehat{EFC}$ mértékét p-vel és az $\widehat{FCB}$ mértékét $4(x-1)$-gyel. Tudjuk, hogy teljesülnek a következő feltételek:

a) Ha egy számot 25%-kal csökkentünk, majd a kapott számot 5-ször egymásután p%-kal növeljük, akkor megkapjuk az eredeti szám 24-szeresét.

b) Tíz nemnulla különböző természetes szám összege 57 és x közülük a két legnagyobb szám összege.

Igazold, hogy az EF és BC egyenesek párhuzamosak!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező, munkaidő: 3 óra.